II.3 Category of covering space and deck transformation group

Note. Assume all the spaces are path connected and locally path connected from now on.

정의 1 Given (X, x_0), consider a **category** of covering spaces $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ and morphisms between covering spaces.
A morphism of $\widetilde{X}_1$ to $\widetilde{X}_2$ is a map $\phi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) & \xrightarrow{\phi} & (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \\ p_1 \searrow & & \swarrow p_2 \\ & (X, x_0) & \end{array}$$ commutes.

즉, 위 diagram 이 commute한다는 말은 fiber를 fiber로 보낸다는 뜻이 된다.

정리 1 *Let $p_i : \widetilde{X}_i \to X, i = 1, 2$ be covering maps. Then a morphism $\phi : (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$ exists if and only of $p_{1\sharp}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \subset p_{2\sharp}\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$.
In this case, ϕ is unique.*

증명 morphism은 본질적으로 lifting이므로, General Lifting Property에 의해 자명하다. uniqueness 역시 lifting의 uniqueness에 의하여 자명하다. □

정리 2 *A morphism ϕ is a covering map.*

증명 Exercise. □

Note. 일반적으로, commute하는 diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ q \searrow & & \swarrow r \\ & Z & \end{array}$$

에서 2개가 covering이면 나머지도 covering임을 보일 수 있다. (Z가 universal covering을 가질때)

정리 3 *Let $p_i : \widetilde{X}_i \to X, i = 1, 2$ be covering maps. Then there exists an isomorphism $\phi : (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$ if and only if $p_{1\sharp}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) = p_{2\sharp}\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$*

증명 ($\Rightarrow$) 정리 1을 양쪽으로 적용하면 자명하다.
($\Leftarrow$) 정리 1에 의하여 morphism $\phi : (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$, $\psi : (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \to (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)$가 존재하고, $\psi \circ \phi$는 $\widetilde{x}_1$을 $\widetilde{x}_1$으로 보내는 lifting이므로, uniqueness에 의하여 identity map이 된다. 마찬가지로 $\phi \circ \psi$도 identity map이므로, ϕ는

isomorphism이 된다. □

위 정리에서 base point와 무관하게 다음 내용이 성립함을 알 수 있다.

따름정리 4 *Let* $p_i : \widetilde{X}_i \to X, i = 1, 2$ *be covering maps. Then there exists an isomorphism* $\phi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ *if and only if* $p_{1\sharp}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)$ *and* $p_{2\sharp}\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$ *are conjugate in* $\pi_1(X, x)$ *for some* $x = p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2)$

증명 앞절에서 일반적으로 $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$와 $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0)$은 conjugate임을 알고 있으므로 정리 3으로부터 보일 수 있다. □

정의 2 An isomorphism $g : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ is called a *deck transformation* (or a *covering transformation*). The group of deck transformations is called a deck transformation group and will be denoted by G in this section.

Note.
(1) $g, h \in G$, $h(\widetilde{x}) = g(\widetilde{x})$ for some $\widetilde{x} \Rightarrow g = h$. Hence G-action on $\widetilde{X}$ is free.
이것은 morphism은 lifting이라는 사실로부터 uniqueness에 의하여 당연하다.
(2) G acts on $p^{-1}(x)$ (as a permutation group.)
즉, $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$에 대하여 $p \circ g(\widetilde{x}) = p(\widetilde{x}) = x$이므로, $g(\widetilde{x}) \in p^{-1}(x)$이다.
(3) $g \in G$ and $g(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_1$, then what is g($\widetilde{y}$) for $\widetilde{y} \in \widetilde{X}$?
general lifting property에서 사용한 argument로 부터 $\widetilde{x}_0$에서 $\widetilde{y}$로 가는 path를 잡고 이 path를 X로 내린 후 $\widetilde{x}_1$에서 출발하는 path로 다시 올리면 그 끝점이 바로 $g(\widetilde{y})$이다.

(참고) Group Action
Let G be a group. G acts on a set X on the left if
$\exists\ \alpha : G \times X \to X$, denoted by $g \cdot x := \alpha(g, x)$
such that (1) $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, (2) $e \cdot x = x$, where e is an identity in G.

- Orbit of $x = G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$,
- Isotropy subgroup at $x = G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$
- The action is said to be *free* if $g \cdot x = x$ for some x implies $g = e$.
- The action is said to be *transitive* if $G \cdot x = X$ for some $x \in X$.
- 일반적으로 $G/G_x \cong G \cdot x$이 성립한다.

(증명)$\phi : G/G_x \to G \cdot x$를 $\phi(gG_x) = g \cdot x$로 정의하면 well-defined이고 bijection임을 쉽게 보일 수 있다.
- $G_{g \cdot x} = g\, G_x\, g^{-1}$

(증명) $\subset$ 은 불변, $\supset$: $G_x = G_{g^{-1}(gx)} \supset g^{-1}\, G_{gx}\, g$ 에서 나온다.

Action of paths on fibers

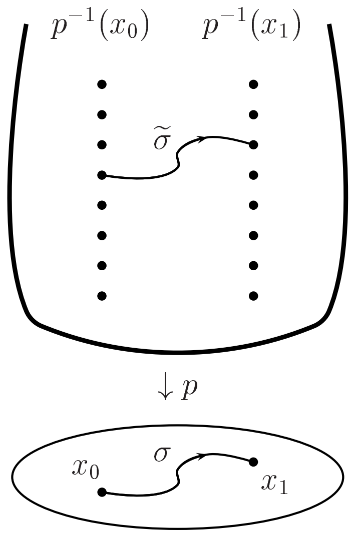

그림 1: Action of paths on fibers

Given σ from x_0 to x_1, a lifting $\widetilde{\sigma}$ defines a bijection $\theta_\sigma : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$ where $\theta_\sigma(\widetilde{\sigma}(0)) = \widetilde{\sigma}(1)$

Note. (a) $\sigma \sim \tau \Rightarrow \theta_\sigma = \theta_\tau$
(b) $\theta_{\sigma * \tau} = \theta_\tau \circ \theta_\sigma$

위 note에 의하여 $\theta_\sigma \circ \theta_{\overline{\sigma}} = \theta_{\sigma * \overline{\sigma}} = \theta_{x_0} = id$이므로, θ_σ는 bijection임을 안다.

따라서,
(1) $|p^{-1}(x_0)| = |p^{-1}(x_1)|$
(2) Have a $\pi_1(X, x_0)$ (right) action on $p^{-1}(x_0)$:
$\widetilde{x_0} \cdot [\alpha] = \theta_\alpha(\widetilde{x_0})$로 정의하면 위의 Note (a)에 의하여 잘 정의되고, Note (b)에 의하여 $\widetilde{x_0} \cdot ([\alpha][\beta]) = \theta_{\alpha*\beta}(\widetilde{x_0}) = \theta_\beta \circ \theta_\alpha(\widetilde{x_0}) = (\widetilde{x_0} \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]$가 된다. 또한 constant loop를 올리면 constant loop가 되기 때문에 $\widetilde{x_0} \cdot 1 = \widetilde{x_0}$가 성립하여 right action이 정의된다.

Isotropy subgroup at $\widetilde{x_0} = p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$:
(증명)($\subseteq$)만약 $[\alpha] \in$ Isotropy subgroup at $\widetilde{x_0}$라면, $\widetilde{x_0} \cdot [\alpha] = \widetilde{x_0}$이므로 $\widetilde{\alpha}$는 loop가 된다. $[\widetilde{\alpha}] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$에서 양변에 $p_\sharp$ 을 취하면 $[\alpha] = p_\sharp[\widetilde{\alpha}] \in p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$이다.
($\supseteq$)역으로 $[\beta] \in p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$를 잡자. 그러면 어떤 $[\beta'] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$에 대해 $p_\sharp([\beta']) = [\beta]$ 이다. 이 때, β의 lifting을 $\widetilde{\beta}$ 라 두면 $p_\sharp[\widetilde{\beta}] = [p \circ \widetilde{\beta}] = [\beta] = p_\sharp[\beta']$. 따라서 $\beta = p \circ \widetilde{\beta} \sim p \circ \beta'$이므로 $\widetilde{\beta} \sim \beta'$ 이 되고, β'은 loop 이므로 $\widetilde{\beta}$도 loop가 된다. 따라서 $\widetilde{\beta}_{\widetilde{x_0}}(1) = \widetilde{x_0}$ 를 만족한다.

(3) $\widetilde{X}$: path connected $\Rightarrow$ π_1-action is transitive.
fiber 상의 임의의 두 점을 연결하는 path가 있으므로, 이 path의 p-image는 loop가 되고 이것에 의한 action을 생각하면 자명하다.

위 사실로부터 다음을 알 수 있다.

$$p^{-1}(x_0) \cong \pi_1(X, x_0)/p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$$

따름정리 5 *If X is simply connected, i.e., $\pi_1(X) = 1$, then $p : \widetilde{X} \to X$ is a homeomorphism.*

증명 $\pi_1(X, x)$이 trivial이므로 그의 subgroup인 $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ 역시 trivial하다. 따라서 $|p^{-1}(x)| = |\pi_1(X, x)| = 1$이 되어 p는 1-1이 된다. 원래 covering map p는 onto, continuous, open map이었으므로 p는 homeomorphism 이 된다. □

Actions of G and $\pi_1(X, x_0)$ on $p^{-1}(x)$

Notation. G= deck transformation group
$\Pi = \pi_1(X, x)$, $Y = p^{-1}(x)$, $\Pi_y = p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, y)$

1. Two actions commute, i.e., $g(\widetilde{x} \cdot [\alpha]) = g(\widetilde{x}) \cdot [\alpha]$.

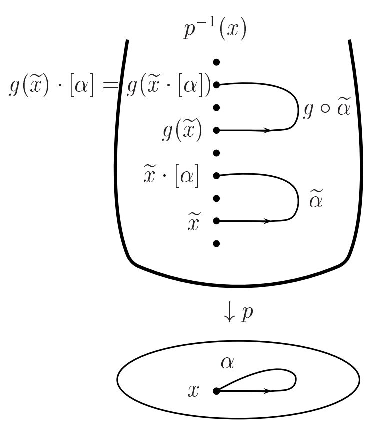

그림 2: Two actions commute

증명 $p \circ (g \circ \widetilde{\alpha}) = p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ 이므로 $g \circ \widetilde{\alpha}$는 α의 lifting임을 안다. 이때, $g \circ \widetilde{\alpha}$의 시작점은 $g(\widetilde{x})$이므로, π_1-action의 정의에 따라 $g(\widetilde{x}) \cdot [\alpha] = (g \circ \widetilde{\alpha})(1)$이다. 그런데, $(g \circ \widetilde{\alpha})(1) = g(\widetilde{\alpha}(1)) = g(\widetilde{x} \cdot [\alpha])$ 이므로 $g(\widetilde{x} \cdot [\alpha]) = g(\widetilde{x}) \cdot [\alpha]$이 된다. □

2. (a) By general lifting theorem(또는 앞절 정리3에 의해) , $\exists g \in G$ such that $g(y) = y' \Leftrightarrow \Pi_y = \Pi_{y'}$.
   (b) In general, $\Pi_{y \cdot [\alpha]} = [\alpha]^{-1}\Pi_y[\alpha]$.

위의 (a)와 (b)로부터 다음 사실을 알 수 있다.

(c) $\boxed{\exists g \in G \text{ such that } g(y) = y \cdot [\alpha] \iff [\alpha] \in N(\Pi_y)}$

여기서 $N(\Pi_y)$는 Π_y의 Normalizer를 말한다. 즉, $[\alpha] \in N(\Pi_y)$는 $[\alpha]^{-1}\Pi_y[\alpha] = \Pi_y$임을 뜻한다.

(d) Define a homomorphism $\theta : N(\Pi_y) \to G$ by $\theta([\alpha])(y) = y \cdot [\alpha]$
(여기서 $\theta([\alpha])$는 deck transformation이므로, uniqueness에 의해 한 점의 image $\theta([\alpha])(y)$에 의해 완전히 결정된다.)
먼저 θ가 homomorphism임을 보이자.
$\theta([\alpha][\beta])(y) = y \cdot ([\alpha][\beta]) = (y \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]$
$= (\theta([\alpha])(y)) \cdot [\beta] = \theta([\alpha])(y \cdot [\beta])$ ($\because$ Two actions commute.)
$= \theta([\alpha])(\theta([\beta]) \cdot y) = (\theta([\alpha])\theta([\beta]))(y)$

θ is onto:
임의의 주어진 $g \in G$에 대해 $y' = g(y)$라 두자. 그리고 $\widetilde{\alpha}$를 y에서 y' 로 가는 path라 두자. 그러면 loop $\alpha = p \circ \widetilde{\alpha}$에 대해 $y' = y \cdot [\alpha]$ 이 되고 위의 2(c)에 의하여 $[\alpha] \in N(\Pi_y)$이 된다.

마지막으로, $ker\theta = \{\alpha \in N(\Pi_y) | y \cdot [\alpha] = y\} = \Pi_y$임을 알수 있으므로 다음을 얻는다.

$$\boxed{N(\Pi_y)/\Pi_y \cong G}$$

이때, $N(\Pi_y)/\Pi_y \cong G$의 isomorphism을 θ_y라 둔다. 즉, $\theta_y(\overline{[\alpha]}) = \theta([\alpha])$.

Remark.
(1) θ_y depends on a choice of $y \in p^{-1}(x)$.

(2) $\widetilde{X}$ is called a universal covering of X if $\widetilde{X}$ is simply connected, i.e., $\widetilde{X}$ is path-connected and $\pi_1(\widetilde{X}) = 0$. In this case, it follows that $\pi_1(X) = G$.

숙제 6. Universal covering의 경우, θ_y가 y의 선택에 따라 어떻게 달라지는가?

정의 3 A covering $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to (X, x)$ is a *regular (or normal) covering* if $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ is a normal subgroup of $\pi_1(X, x)$.

Note. The notion of regular covering is independent of choice of base point, i.e., if $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ is a regular covering, then $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to (X, x)$ is also a regular covering.

증명

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) & \xrightarrow{\phi_\rho} & \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \\ p_\sharp \downarrow & & \downarrow p_\sharp \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\phi_{\overline{\rho}}} & \pi_1(X, x) \end{array}$$

ρ를 $\widetilde{x}_0$에서 $\widetilde{x}$로 가는 path라 하고, $\overline{\rho} = p \circ \rho$라 하면, $\phi_\rho, \phi_{\overline{\rho}}$는 모두 isomorphism이고, 위 diagram이 commute하므로,$p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$이 $\pi_1(X, x_0)$의 normal subgroup이면 $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$이 $\pi_1(X, x)$의 normal subgroup이 된다. □

정리 6 $p : \widetilde{X} \to X$ *is a regular covering* $\Leftrightarrow$ G *action on* $p^{-1}(x)$ *is transitive.*

증명 p가 regular covering이라는 것은 어떤 $y \in \widetilde{X}$에 대하여 $N(\Pi_y) = \Pi$라는 것과 동치이다. 먼저, $N(\Pi_y) = \Pi$라면, 임의의 $y' \in p^{-1}(x), x = p(y)$에 대하여 y에서 y'으로 가는 path $\widetilde{\alpha}$가 존재하고 이것의 p-image를 α라고 하면 $[\alpha] \in \Pi = N(\Pi_y)$이고 $y' = y \cdot [\alpha]$이다. 따라서, 2.(c)에 의하여 $g(y) = y'$인 $g \in G$가 존재하므로 $p^{-1}(x) = G \cdot y$이다.
역으로 $p^{-1}(x) = G \cdot y$라면, 임의의 $[\alpha] \in \Pi$에 대하여, $g(y) = y \cdot [\alpha]$인 g가 존재하므로 2.(c)에 의하여 $[\alpha] \in N(\Pi_y)$가 되어 $N(\Pi_y) = \Pi$가 된다. □

Application. If $\Pi = \pi_1(X)$ for some X and Γ is a subgroup of Π of index 2, then $\Gamma \lhd \Pi$.
증명 다음 절의 정리에 따라 $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = \Gamma$가 되는 covering $\widetilde{X}$가 존재하고, index가 2이므로 이 covering은 double covering이 된다. 이 때, 각 fiber의 두 점을 치환하는 map은 deck transformation이 되고 deck transformation group G는 order 2인 group이 되므로 G-action은 transitive하게 된다. 따라서, 위의 정리에 따라 $\Gamma \lhd \Pi$임을 알 수 있다. □

일반적으로 group G가 set X에 act하는 경우에 orbit들의 모임 $\{G\cdot x \mid x \in X\}$을 orbit space라고 하고, $G\setminus X$로 쓴다. 이 때, cannonical projection $q : X \to G\setminus X$가 surjection이므로, $G\setminus X$에 quotient topology를 준다. 이때, q를 quotient map이라고 부른다.

정리 7 *If $p : \widetilde{X} \to X$ is a regular covering, then $X = G\setminus \widetilde{X}$.*

증명 quotient map $q : \widetilde{X} \to G\setminus X$을 생각하면, 정리 6에 의하여 q가 바로 covering map p와 일치한다는 것을 알 수 있고, 따라서 $X = G\setminus \widetilde{X}$이다. □

위 정리의 역을 생각하기 위하여 다음을 정의한다.

정의 4 A group action $(G,\widetilde{X})$ is called a *covering action* if
(1) G-action is free
(2) $\forall \widetilde{x} \in \widetilde{X}$, $\exists U$ a neighborhood of $\widetilde{x}$ such that $g(U)\bigcap U = \varnothing$, $\forall g \in G$.

정리 8 *If $(G,\widetilde{X})$ is a covering action, then the quotient map $q : \widetilde{X} \to G\setminus \widetilde{X}$ is a regular covering.*

증명 covering action의 조건 (2)에 따라, 임의의 $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$에 대해 좋은 neighborhood U가 존재하여 $g(U)$들이 모두 disjoint하게 된다. 따라서, $g(\widetilde{x}) \in G\setminus\widetilde{X}$의 neighborhood $q(U)$가 바로 evenly covered neighborhood가 되어, q가 covering map이 된다. 이때, G의 원소들은 deck transformation이 되고, orbit space의 정의에 따라, G-action이 transitive임은 당연하다. 따라서, 정리 6에 의하여 regular covering이 된다. □

숙제 7.. Let $p : \widetilde{X} \to X$ be a covering map. Show that $\widetilde{X}$ is Hausdorff if X is Hausdorff. Is the converse true?
(Hint. Let $f : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ be given by $f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, and
consider the action $(G, \mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ where $G =< f >\cong \mathbb{Z}$.)